BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

MEXANİKA

ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

Н.К.АХМЕДОВ, С.Б.АКПЕРОВА
Бакинский Государственный Университет
anatiq@gmail.com

Методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости исследована задача кручения радиально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра малой толщины. В предположении достаточной гладкости нагрузки с помощью асимптотического метода строятся неоднородные решения. Дан алгоритм построения точных частных решений уравнений равновесия для специальных видов нагрузок, боковая поверхность цилиндра которых нагружена силами, полиномиально зависящими от осевой координаты. Построены однородные решения. Основываясь на асимптотическом методе, проведен качественный анализ напряженно-деформированного состояния цилиндра.

1. Рассмотрим задачу кручения для радиально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра малой толщины. Отнесем цилиндр к цилиндрической системе координат r, φ, z:

$$r_1 \le r \le r_2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -L \le z \le L .$$

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил в цилиндрической системе координат имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 , \tag{1.1}$$

где $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}$ - компоненты тензора напряжения, которые выражаются через компоненты вектора перемещений следующим образом [2]:

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12})\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \quad \sigma_{\varphi z} = A_{44}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} . \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получаем уравнения равновесия в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[(b_{11} - b_{12})e^{-\varepsilon\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi\right)\right] + 2\varepsilon(b_{11} - b_{12})e^{-\varepsilon\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi\right) + 2\varepsilon^2 e^{\varepsilon\rho} b_{44}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \xi^2} = 0 . \tag{1.3}$$

Здесь $u_\varphi = u_\varphi(\rho,\xi)$- компонент вектора смещения; $\rho = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$, $\xi = \frac{z}{r_0}$ – новые безразмерные переменные, $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ малый параметр, характеризующий толщину цилиндра, $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, $\rho \in [-1;1]$, $\xi \in [-l;l]$ $\left(l = \frac{L}{r_0}\right)$, $b_{ij} = b_{ij}(\rho)$– упругие характеристики, рассматриваемые как произвольная кусочно-непрерывная функция переменной ρ; $b_{ij} = \frac{A_{ij}}{G_*}$, G_*– некоторый характерный модуль, например, $G_* = \max A_{ij}(\rho)$.

Предположим, что на боковую часть границы действует нагрузка

$$\sigma_{\rho\varphi}\Big|_{\rho=\pm1} = \frac{1}{2\varepsilon}(b_{11} - b_{12})e^{-\varepsilon\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho} - \varepsilon u_\varphi\right)\Bigg|_{\rho=\pm1} = t^{\pm}(\xi). \tag{1.4}$$

Здесь $t^{\pm}(\xi)$- достаточно гладкие функции.

2. Рассмотрим построение частных решений уравнения (1.3), удовлетворяющих граничным условиям (1.4), т.е неоднородных решений. При построении частных решений (1.3) можно использовать различные приемы. Если относительная толщина оболочки достаточно мала, а нагрузка, заданная на боковых поверхностях, достаточно гладкая и относительно ε имеет порядок $O(1)$, то для построения неоднородных решений целесообразно использовать первый итерационный процесс асимптотического метода [3].

Рассмотрим вопрос о построении неоднородного решения на основе первого итерационного процесса.

Решение (1.3), (1.4) будем отыскивать в виде:

$$u_\varphi = \varepsilon^{-1}\left(u_{\varphi 0} + \varepsilon u_{\varphi 1} + \varepsilon^2 u_{\varphi 2} + ...\right). \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.3), (1.4) приводит к системе, последовательное интегрирование которой по ρ дает соотношения для коэффициентов разложения u_φ :

$$\begin{aligned}
&u_{\varphi 0} = \Phi_1(\xi),\\
&u_{\varphi 1} = \rho\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\xi), \qquad\qquad (2.2)\\
&u_{\varphi 2} = \rho\Phi_2(\xi) + \frac{\rho^2}{2}\Phi_1(\xi) + \Phi_3(\xi) + \frac{2t(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\int_0^\rho \frac{1}{(b_{11} - b_{12})}\left(\int_{-1}^{y} b_{44}\,dx\right)dy +\\
&+ 2t^{-}(\xi)\int_0^\rho \frac{1}{(b_{11} - b_{12})}dx,
\end{aligned}$$

где

$$\Phi_1''(\xi)=\frac{-t(\xi)}{b_{44}^{(0)}};\qquad \Phi_2''(\xi)=\frac{2t(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\left(\frac{2b_{44}^{(1)}}{b_{44}^{(0)}}-1\right)-\frac{4t^-(\xi)}{b_{44}^{(0)}};$$

$$\Phi_3''(\xi)=\left(2b_{44}^{(0)}-8b_{44}^{(1)}+8b_{44}^{(2)}\right)\frac{t(\xi)}{\left(b_{44}^{(0)}\right)^2}+\left(2-\frac{4b_{44}^{(1)}}{b_{44}^{(0)}}\right)\left[\frac{2t(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\left(1-\frac{2b_{44}^{(1)}}{b_{44}^{(0)}}\right)+\frac{4t^-(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\right]+$$

$$+\frac{8}{b_{44}^{(0)}}t^-(\xi)-\frac{2t''(\xi)}{\left(b_{44}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1}b_{44}\left(\int_0^{\rho}\frac{1}{(b_{11}-b_{12})}\left(\int_{-1}^{y}b_{44}dx\right)dy\,d\rho-\frac{2\left(t^-(\xi)\right)''}{b_{44}^{(0)}}\int_{-1}^{1}b_{44}\left(\int_0^{\rho}\frac{1}{b_{11}-b_{12}}dx\right)d\rho;$$

$$b_{44}^{(k)}=\int_{-1}^{1}b_{44}(\rho)\rho^k d\rho;\qquad t(\xi)=t^+(\xi)-t^-(\xi).$$

С помощью обобщенного закона Гука для напряжений $\sigma_{\rho\varphi},\sigma_{\varphi\xi}$ получим следующие асимптотические выражения:

$$\sigma_{\rho\varphi}=\frac{t(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\int_{-1}^{\rho}b_{44}dx+t^-(\xi)+\varepsilon\left[\frac{2t(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\left(\int_{-1}^{\rho}xb_{44}dx-\int_{-1}^{\rho}\left(\int_{-1}^{x}b_{44}dy\right)dx\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2t(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\left(1-\frac{2b_{44}^{(1)}}{b_{44}^{(0)}}\right)+\frac{4t^-(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\right)\int_{-1}^{\rho}b_{44}dx-2t^-(\xi)(\rho+1)\right]+O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\sigma_{\xi\varphi}=\varepsilon^{-1}b_{44}\left\{\Phi_1'(\xi)+\varepsilon\left[\rho\Phi_1'(\xi)+\Phi_2'(\xi)\right]+\varepsilon^2\left[\frac{\rho^2}{2}\Phi_1'(\xi)+\Phi_3'(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\rho\Phi_2'(\xi)+\frac{2t'(\xi)}{b_{44}^{(0)}}\int_0^{\rho}\frac{1}{b_{11}-b_{12}}\left(\int_{-1}^{y}b_{44}dx\right)dy+2\left(t^-(\xi)\right)'\int_0^{\rho}\frac{1}{(b_{11}-b_{12})}dx\right]+O\left(\varepsilon^3\right)\right\}.$$

3. Построим неоднородные решения для задач (1.3), (1.4) методом, изложенным в [4]. Считаем, что на боковых поверхностях цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{\rho\varphi}\big|_{\rho=\pm1}=q^{\pm}\frac{\xi^n}{n!}. \qquad (3.1)$$

Имея набор решений для различных целых “n”, можно построить решения для произвольных граничных условий, заданных гладкими функциями $t^{\pm}(\xi)$, аппроксимировав их предварительно полиномами.

Рассмотрим вначале вспомогательную задачу. Предполагаем, что на боковых поверхностях задана нагрузка:

$$\sigma_{\rho\varphi}\big|_{\rho=\pm1}=q^{\pm}e^{\gamma\xi}. \qquad (3.2)$$

Решение (1.3), (3.2) будем искать в виде:

$$u_{\varphi}(\rho;\xi)=\upsilon(\rho)e^{\gamma\xi}. \qquad (3.3)$$

После подстановки (3.3) в(1.1), (3.2) получаем:

$$\begin{cases}(L_1\upsilon)' + 2\varepsilon L_1\upsilon + \gamma^2 L_2\upsilon = 0, & (3.4)\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}L_1\upsilon\Big|_{\pm 1} = q^{\pm}, & (3.5)\end{cases}$$

где $L_1\upsilon = (b_{11} - b_{12})e^{-\varepsilon\rho}(\upsilon'(\rho) - \varepsilon\upsilon(\rho))$; $\quad L_2\upsilon = 2\varepsilon^2 b_{44}e^{\varepsilon\rho}\upsilon(\rho)$.

Решение (3.4), (3.5) является мероморфной функцией спектрального параметра γ, и полюса её совпадают со спектром однородной задачи, когда $q^{\pm} = 0$.

Можно показать, что $\gamma = 0$ является двухкратной точкой спектра однородной задачи $q^{\pm} = 0$. В окрестности нуля решение (3.4),(3.5) имеет вид:

$$\upsilon(\rho) = \gamma^{-2}\sum_{r=0}^{\infty}\gamma^k \upsilon_k(\rho). \tag{3.6}$$

Введем оператор:

$$P(\cdot) = \frac{1}{(n+2)!}\lim_{\gamma\to 0}\frac{d^{n+2}\gamma^2(\cdot)}{d\gamma^{n+2}}. \tag{3.7}$$

Если к правой части (3.2) применить оператор $P(\cdot)$, то получим выражение, стоящее в правой части (3.1). Подставим (3.6) в (3.3), а затем в (1.3), (3.2). Далее, подействуя на (1.3), (3.2) оператором (3.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получаем рекуррентную систему краевых задач для определения $\upsilon_k(\rho)$:

$$\begin{cases}(L_1\upsilon_0)' + 2\varepsilon L_1\upsilon_0 = 0,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}L_1\upsilon_0\Big|_{\pm 1} = 0;\end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases}(L_1\upsilon_1)' + 2\varepsilon L_1\upsilon_1 = 0,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}L_1\upsilon_1\Big|_{\pm 1} = 0;\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases}(L_1\upsilon_{2+k})' + 2\varepsilon L_1\upsilon_{2+k} + L_2\upsilon_k = 0,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}L_1\upsilon_{2+k}\Big|_{\pm 1} = q^{\pm}\delta_{0k},\end{cases} \tag{3.10}$$

где δ_{0k} -символ Кронекера, $k = \overline{0;n}$.

Решение задачи (1.3), (3.1) принимает вид:

$$u_{\varphi}(\rho;\xi) = \sum_{k=0}^{n+2}\frac{\xi^{n+2-k}}{(n+2-k)!}\upsilon_k(\rho). \tag{3.11}$$

Система краевых задач (3.8)-(3.10) эффективно решается методом малого параметра. Проведем построение решения в случае $n = 0$ (построение решения для $n>0$ принципиальных трудностей не имеет, однако громоздко, поскольку связано с дополнительным интегрированием):

$$u_\varphi(\rho,\xi)=\frac{\xi^2}{2}\frac{\left(q^-e^{-2\varepsilon}-q^+e^{2\varepsilon}\right)e^{\varepsilon\rho}}{\varepsilon\int\limits_{-1}^{1}b_{44}e^{3\varepsilon\rho}d\rho}-2\varepsilon\frac{\left(q^-e^{-2\varepsilon}-q^+e^{2\varepsilon}\right)e^{\varepsilon\rho}}{\int\limits_{-1}^{1}b_{44}e^{3\varepsilon\rho}d\rho}\int\limits_0^\rho\frac{e^{-2\varepsilon y}}{b_{11}-b_{12}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-1}^{y}b_{44}e^{3\varepsilon x}dx\right)dy+2\varepsilon q^-e^{\varepsilon\rho}\int\limits_0^\rho\frac{e^{-2\varepsilon(1+x)}}{b_{11}-b_{12}}dx+\left(F_0+\xi B_0\right)e^{\varepsilon\rho}\,. \qquad (3.12)$$

Постоянные F_0, B_0 определяются при удовлетворении граничных условий на торцах цилиндра $\xi=\pm l$.

4. Однородным решением будем называть всякое решение уравнения равновесия (1.3), удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на боковых поверхностях.

Построим однородное решение. Положим в (1.4) $t^\pm(\xi)=0$. Отыскивая решения однородных систем в виде

$$u_\varphi(\rho,\xi)=\upsilon(\rho)e^{\mu\xi},$$

получаем:

$$\begin{cases}(L_1\upsilon)'+2\varepsilon L_1\upsilon+\mu^2L_2\upsilon=0, & (4.1)\\ L_1\upsilon\big|_{\rho=\pm1}=0. & (4.2)\end{cases}$$

(4.1), (4.2) представим в следующем виде:

$$A\upsilon=\mu^2\upsilon, \qquad (4.3)$$

где

$$A\upsilon=\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2e^{\varepsilon\rho}b_{44}}\left[(L_1\upsilon)'+2\varepsilon L_1\upsilon\right];\ L_1\upsilon\big|_{\rho=\pm1}=0\right\}.$$

Легко доказать, что A - симметричный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(-1;1)$ с весом $b_{44}(\rho)e^{2\varepsilon\rho}$. Все собственные значения $\lambda_k(A)$ вещественны, а соответствующие им собственные функции можно считать ортонормированными:

$$\int\limits_{-1}^{1}b_{44}(\rho)\upsilon_k(\rho)\upsilon_n(\rho)e^{2\varepsilon\rho}d\rho=\delta_{kn}\,. \qquad (4.4)$$

Однородное решение, соответствующее первому итерационному процессу, получается из (3.12) (или из (2.1),(2.2)), если в него подставить $q^\pm=0\left(t^\pm(\xi)=0\right)$:

$$u_\varphi^{(1)}(\rho,\xi)=(F_0+B_0\xi)e^{\varepsilon\rho}$$

Этому решению соответствует двукратное собственное значение $\mu=0$. Напряжения, соответствующие этому решению имеют вид:

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(1)}=0;\quad \sigma_{\varphi\xi}^{(1)}=B_0b_{44}e^{\varepsilon\rho}\,.$$

Отметим, что постоянная F_0 соответствует перемещению цилиндра, как абсолютно твердого тела. Поэтому можно считать $F_0 = 0$. Таким образом,

$$u_\varphi^{(1)}(\rho,\xi) = \xi e^{\varepsilon\rho} B_0 . \tag{4.5}$$

Решение, имеющее характер краевого эффекта, соответствующее второму асимптотическому процессу, здесь отсутствует.

Согласно третьему асимптотическому процессу, решение спектральной задачи (4.1) ищем в виде:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \varepsilon\upsilon_1 + \ldots\ldots, \quad \mu = \varepsilon^{-1}(\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \ldots\ldots). \tag{4.6}$$

После подстановки (4.6) в (4.1) для первых членов разложения (4.6), получаем:

$$A_0\upsilon_0 = \mu_0^2\upsilon_0 , \tag{4.7}$$

где
$$A_0\upsilon_0 = \left\{ -\frac{1}{2b_{44}}\left[(b_{11}-b_{12})\upsilon_0'\right]', \ (b_{11}-b_{12})\upsilon_0'\big|_{\rho=\pm1} = 0 \right\}.$$

Задача (4.7) совпадает с задачей для вихревого решения неоднородной трансверсально изотропной плиты. A_0 является положительным оператором в пространстве $L_2(-1;1)$ с весом $b_{44}(\rho)$. Следовательно, все собственные значения $\lambda_k(A_0) = \mu_{0k}^2$ неотрицательны.

Для определения υ_1 и μ_1 имеем:

$$\begin{cases} \left[(b_{11}-b_{12})\upsilon_1'\right]' + 2b_{44}\mu_0^2\upsilon_1 = \left[(b_{11}-b_{12})\upsilon_0\right]' - \\ -(b_{11}-b_{12})\upsilon_0' - 4\left(\mu_0\mu_1 + \rho\mu_0^2\right)b_{44}\upsilon_0, & (4.8) \\ (b_{11}-b_{12})(\upsilon_1' - \upsilon_0)\big|_{\rho=\pm1} = 0. & (4.9) \end{cases}$$

Решение (4.8) ищем в виде:

$$\upsilon_{1n}(\rho) = \int_{-1}^{\rho}\upsilon_{0n}dx + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk}\upsilon_{0k}(\rho). \tag{4.10}$$

(4.10) удовлетворяет граничным условиям(4.9). Из (4.8) с помощью (4.4), (4.10) имеем:

$$\mu_{1n} = -\frac{1}{4\mu_{0n}}\left[2\mu_{0n}^2\int_{-1}^{1}b_{44}\upsilon_{0n}\left(\int_{-1}^{\rho}\upsilon_{0n}dx\right)d\rho + \int_{-1}^{1}(b_{11}-b_{12})\upsilon_{0n}'\upsilon_{0n}d\rho + 4\mu_{0n}^2\int_{-1}^{1}\rho b_{44}\upsilon_{0n}^2 d\rho\right],$$

$$\upsilon_{1n} = \int_{-1}^{\rho}\upsilon_{0n}dx - \upsilon_{0n}(\rho)\int_{-1}^{1}b_{44}(\rho)\left(\rho\upsilon_{0n}^2(\rho) + \upsilon_{0n}(\rho)\left(\int_{-1}^{\rho}\upsilon_{0n}dx\right)\right)d\rho + \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{2\left(\mu_{0k}^2 - \mu_{0n}^2\right)}\times$$

$$\times\left[\int_{-1}^{1}(b_{11}-b_{12})\upsilon_{0n}'\upsilon_{0k}d\rho + 4\mu_{0n}^2\int_{-1}^{1}\rho b_{44}\upsilon_{0n}\upsilon_{0k}d\rho + 2\mu_{0n}^2\int_{-1}^{1}b_{44}\left(\int_{-1}^{\rho}\upsilon_{0n}dx\right)\upsilon_{0k}d\rho\right]\upsilon_{0k}(\rho).$$

Отметим, что напряжения $\sigma_{\rho\varphi}^{(3)}, \sigma_{\varphi\xi}^{(3)}$ относительно ε имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

5. На основе вышепроведенного анализа укажем характер построенных решений.

Перемещения представим в виде:

$$u_\varphi(\rho,\xi)=B_0\xi e^{\varepsilon\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_k(\rho)m_k(\xi), \tag{5.1}$$

где $m_k(\xi)=D_k e^{\mu_k\xi}+E_k e^{-\mu_k\xi}$.

Во второе слагаемое включены перемещения, определяемые третьими группами решений.

Для напряжений получаем:

$$\sigma_{\rho\varphi}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\varepsilon}(b_{11}-b_{12})e^{-\varepsilon\rho}(\upsilon_k'(\rho)-\varepsilon\upsilon_k(\rho))m_k(\xi), \tag{5.2}$$

$$\sigma_{\varphi\xi}=B_0 b_{44}e^{\varepsilon\rho}+\sum_{k=1}^{\infty}b_{44}(\rho)\upsilon_k(\rho)m_k'(\xi). \tag{5.3}$$

Докажем, что постоянная B_0 при отсутствии внешних усилий на боковых поверхностях, пропорциональна крутящим моментам M_{kp} напряжений, действующих в сечении $\xi=const$.

Для крутящих моментов M_{kp} напряжений, действующих в сечении $\xi=const$, имеем:

$$M_{kp}=2\pi\int_{r_1}^{r_2}\sigma_{\varphi z}r^2dr=2\pi r_0^3\varepsilon\int_{-1}^{1}\sigma_{\varphi\xi}e^{3\varepsilon\rho}d\rho. \tag{5.4}$$

Подставляя (5.3) в (5.4), получаем:

$$M_{kp}=2\pi r_0^3\varepsilon B_0\int_{-1}^{1}b_{44}(\rho)e^{4\varepsilon\rho}d\rho+2\pi r_0^3\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k m_k'(\xi), \tag{5.5}$$

где $\omega_k=\int_{-1}^{1}b_{44}(\rho)\upsilon_k(\rho)e^{3\varepsilon\rho}d\rho$.

Умножаем обе части (4.1) на $e^{\varepsilon\rho}$ и интегрируем полученное выражение в пределах $[-1;1]$:

$$\int_{-1}^{1}\left[(b_{11}-b_{12})(\upsilon_k'(\rho)-\varepsilon\upsilon_k(\rho))\right]' e^{\varepsilon\rho}d\rho+\varepsilon\int_{-1}^{1}(b_{11}-b_{12})(\upsilon_k'(\rho)-\varepsilon\upsilon_k(\rho))e^{\varepsilon\rho}d\rho+$$

$$+2\varepsilon^2\mu_k^2\int_{-1}^{1}b_{44}e^{3\varepsilon\rho}\upsilon_k(\rho)d\rho=0. \tag{5.6}$$

С помощью интегрирования по частям и с использованием граничного условия (4.2) из (5.6) получаем:

$$\omega_k=\int_{-1}^{1}b_{44}e^{3\varepsilon\rho}\upsilon_k(\rho)d\rho=0. \tag{5.7}$$

После подстановки (5.7) в (5.5) имеем:

$$M_{kp}=2\pi r_0^3\varepsilon B_0\int_{-1}^{1}b_{44}(\rho)e^{4\varepsilon\rho}d\rho. \tag{5.8}$$

Первая часть решения (5.1) определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние цилиндра.

Напряженное состояние, соответствующее третьей группе решений, имеет характер пограничного слоя и первые члены его асимптотического разложения эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана в теории неоднородных трансверсально-изотропных плит.

6. Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с торцов цилиндра. Допустим на торцах цилиндра, заданы напряжения

$$\sigma_{\varphi\xi}\Big|_{\xi=\pm l} = b_{44}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=\pm l} = f^{\pm}(\rho), \tag{6.1}$$

где $f^{\pm}(\rho)$ - достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Как было показано, несамоуравновешенную часть напряжений можно снять при помощи проникающего решения (4.5), причем связь постоянной B_0 с крутящим моментом дается равенством (5.8). Предполагаем, что $M_{kp}=0$. В силу принятого предположения $B_0=0$.

Подставляем (5.3) в (6.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{44}(\rho)\upsilon_k(\rho)m_k'(\xi)\Big|_{\xi=\pm l} = f^{\pm}(\rho). \tag{6.2}$$

Умножая (6.2) на $\upsilon_n(\rho)e^{2\varepsilon\rho}$ и интегрируя в пределах $[-1;1]$, с учетом (4.4) имеем:

$$\left(\mu_n e^{\mu_n\xi}D_n - \mu_n e^{-\mu_n\xi}E_n\right)\Big|_{\xi=\pm l} = h_n^{\pm}, \tag{6.3}$$

где $h_n^{\pm} = \int\limits_{-1}^{1} f^{\pm}(\rho)\upsilon_n(\rho)e^{2\varepsilon\rho}d\rho$.

После решения (6.3) определяем неизвестные постоянные D_n и E_n:

$$D_n = \frac{h_n^+ e^{\mu_n l} - h_n^- e^{-\mu_n l}}{2\mu_n sh(2\mu_n l)}, \qquad E_n = \frac{h_n^+ e^{-\mu_n l} - h_n^- e^{\mu_n l}}{2\mu_n sh(2\mu_n l)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И.Теория упругости. М.: Наука, 1970, 939 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 415 с.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика, 1963, т. 27, №4, с. 593-608.
4. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. Ростов н/Д: ООО «ЦВВР», 2006, 257 с.

KİÇİK QALINLIQLI RADİUS BOYU QEYRİ-BİRCİNS TRANSVERSAL-İZOTROP SİLİNDRİN BURULMA MƏSƏLƏSİ

N.Q.ƏHMƏDOV, S.B.ƏKBƏROVA

XÜLASƏ

Bu işdə kiçik qalınlıqlı radius boyu qeyri-bircins transversal-izotrop silindrin burulma məsələsi elastikiyyət nəzəriyyəsi tənliklərinin asimptotik inteqrallanması üsulu ilə tədqiq edilir. Yan səthə təsir edən yükün kifayət qədər hamar olması fərz edilməklə asimptotik metod vasitəsilə qeyri-bircins həllər qurulur. Silindrin yan səthində verilmiş yük xüsusi formada, silindrin oxu istiqamətində yönəlmiş koordinatdan çoxhədli şəklində asılı olduqda, tarazlıq tənliklərinin xüsusi həllərinin dəqiq qurulması alqoritmi verilir. Bircins həllər qurulur. Asimptotik metod əsasında gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili aparılır.

TORSION PROBLEM FOR RADIALLY NONHOMOGENEOUS TRANSVERSALLY ISOTROPIC CYLINDER OF SMALL THICKNESS

N.K.AHMADOV, S.B.AKPEROVA

SUMMARY

The torsion problem of radially isotrophic cylinder of small thickness is investigated by the asymptotic integration method of equations of elasticity theory [1]. In the assumption of sufficient smoothness of loading by means of asymptotic method the nonhomogeneous solution is constructed. The algorithm of exact solutions of equilibrium equations is given for special form of loading, whose lateral surface of cylinder is loaded by force, polynomially depending on axis coordinate. The homogeneous solutions are constructed. Based on asymptotic method, the qualitative analysis of the deflected mode of the cylinder is carried out.